Disquisiciones Científicas

De Pitágoras a Andrew Wiles, El Último Teorema de Fermat
El Costo de no Pensar. Una Tripleta Pitagórica Especial
Del Error Inducido por Redondeo o Truncamiento de Cifras Decimales

Por

KAREN MEDINA
JUAN M. PÉREZ
GERMAN D. MARTINEZ
Mg. FAUSTO M. LAGOS
Colegio Seminario Diocesano de Duitama

$\mathcal{M}$&$\mathcal{T}$
No 1 Año 2016
Matemáticas y Tecnología

M&T • 1-5
Número Uno - 2016

De Pitágoras a Andrew Wiles, El último teorema de Fermat

Comunicación

Lic. Fausto M. Lagos S.[1*], Juan M. Pérez[2], Karen Medina[2***]**

1 Mg. Ingeniería computacional y matemática, Depto. Matemáticas URV, Tarragona, España

2 Colegio Seminario Diocesano de Duitama

Abstract: El último teorema de Fermat se consideró durante más de 300 años uno de los mayores enigmas de la teoría de números, un problema que retó a grandes matemáticos y que finalmente aportó tantas nuevas matemáticas que se abrió un camino lleno de riquezas inexploradas para la teoría de números. La historia del trabajo hecho por Andrew Wiles durante siete años para conseguir resolver este enigma matemático, desprendida de romanticismos distractores pero lo suficientemente meticulosa para entender su trascendencia, es puesta en común en el presente artículo que sin detenerse en los sinuosos caminos de la rigurosidad matemática muestra la importancia del problema, tal vez, más famoso de la matemática y su demostración.

MSC: 01-00

Keywords: Conjetura de Taniyama - Shimura • El último teorema de Fermat • Premio Abel 2016

1. Introducción

El teorema de Pitágoras establece que para todo triángulo rectángulo se cumple la relación

$$x^2 + y^2 = z^2. \tag{1}$$

En particular si x, y y z son números enteros se les denomina *terna pitagórica*, y es fácil demostrar que existen infinitas ternas pitagóricas (ver [4]).

De manera más general, se llaman ecuaciones diofánticas a aquellas ecuaciones algebraicas cuyos coeficientes, tanto como sus soluciones son números enteros, el nombre de tales se debe al matemático Diofanto quien se supone vivió en el siglo III antes de Cristo, Diofanto, en su libro *Aritmética* trató en detalle este tipo de problemas que están relacionados con las ternas pitagóricas.

Pierre de Fermat (francés, 1601 - 1665), en su estudio de las ecuaciones de Diofanto dejó la anotación:

* *E-mail: fausto.lagos@colseminario.edu.co*
** *E-mail: juan.perez@colseminario.edu.co*
*** *E-mail: karen.medina@colseminario.edu.co*

"No existen enteros x, y, z y n tal que $x^n + y^n = z^n$ para $n \geq 3$,

he encontrado una hermosa demostración de esto pero el margen de este libro es muy pequeña para poder contenerla".

Tal demostración nunca fue encontrada y el último teorema de Fermat se convirtió en un enigma matemático que permaneció sin solución por más de trescientos años, tiempo en el que grandes matemáticos abordaron su ataque sin éxito, alrededor suyo se han construido leyendas románticas que no son del interés en el presente artículo dedicado a recorrer la historia y el proceso seguido por Andrew Wiles (británico, 1953) quien en 1994 presentó de manera definitiva la demostración del último teorema de Fermat como consecuencia de la conjetura de Taniyama-Shimura.

2. Contexto histórico



Figura 1. **Pierre de Fermat**

Pierre de Fermat fue uno de los matemáticos más influyentes del siglo XVII a pesar de su profesión como jurista, continuó con el estudio de las ecuaciones diofánticas y se considera padre de la teoría de probabilidades junto a Pascal (francés, 1923 - 1962), sin embargo es principalmente conocido por el *último teorema de Fermat* el cual en su época y 300 años después permaneció siendo un enigma de la teoría de números ya que a pesar del trabajo de matemáticos de la talla de Leonard Euler (suizo, 1707 - 1783), Augustin Louis Cauchy (francés, 1798 - 1857) o Gabriel Lamé (francés, 1795 - 1870), quienes fueron algunos de los que trabajaron infructuosamente en resolverlo a pesar de que dejaron grandes avances en la demostración de algunos casos particulares, no fue sino hasta el año 1993 cuando Andrew Wiles, después de siete años de trabajo logró demostrarlo como consecuencia de la conjetura de Taniyama - Shimura.

3. La demostración de Andrew Wiles

Andrew Wiles logra demostrar el último teorema de Fermat gracias a la comprobación de la conjetura de Taniyama - Shimura o como se conoce hoy el "Teorema de modularidad", éste utiliza la teoría de números y la topología para relacionar las formas modulares con curvas elípticas.

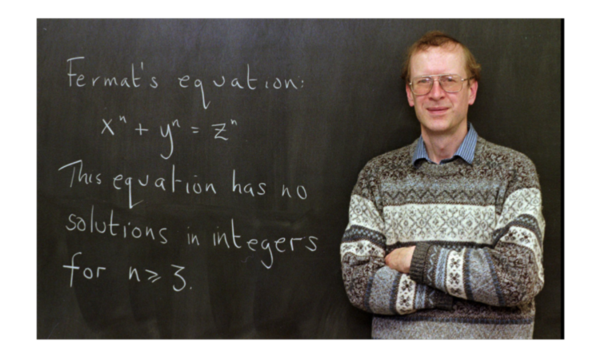


Figura 2. **Andrew Wiles**

La topología es una rama de las matemáticas que en particular hace referencia a la geometría euclídea. Intuitivamente consiste en que dos cuerpos son semejantes, si deformando uno de ellos se puede obtener como resultado el otro, e.g. podría estirarse lo suficiente una taza de café, hasta que se obtenga la forma de una rosquilla.

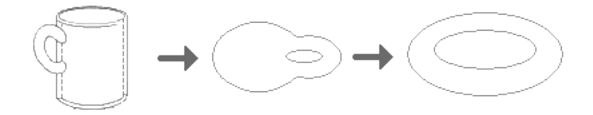


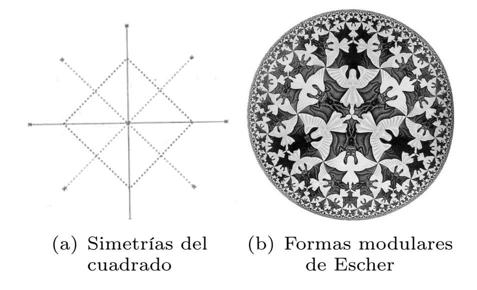
Figura 3. **Topología**

La teoría de números se encarga de agrupar en su mayoría los números enteros según sus propiedades en grupos o familias, tal como los números primos o palíndromos.

Las formas modulares habitan en el plano tetradimensional de los números complejos, llamado espacio hiperbólico, las cuales son los objetos matemáticos más simétricos, siendo esta su principal característica. La simetría que comúnmente se conoce, tiene un especial significado en matemáticas: un objeto tiene simetría si se puede transformar de un modo particular y después de la transformación permanece inalterado. Si se toma un cuadrado como ejemplo, su simetría se puede dar rotacional y por reflexión. En el caso de un objeto de dos dimensiones, es imposible hallar una forma modular, aunque éstas también existan en dos ejes que pertenecen al espacio complejo y para cada uno existe un eje real y uno complejo.

En cuanto a las curvas elípticas, éstas estan definidas en cualquier parte del plano, tienen forma de rosquilla en el espacio, y cada punto de dicha rosquilla es la solución de una ecuación, cabe resaltar que no se trata de elipses, son curvas *regulares*, es decir no tienen *vértices* ni autointersecciones, y se puede definir una operación binaria para el conjunto de sus puntos de una manera geométrica natural, lo que hace a dicho conjunto un grupo abeliano (ver [3]).

La importancia del teorema de modularidad radica en que relaciona dos áreas de las matemáticas aparentemente distantes como son las formas modulares y las curvas elípticas, y afirma que toda forma modular es una curva



(a) Simetrías del cuadrado (b) Formas modulares de Escher

Figura 4. **Aproximaciones gráficas a la definición de formas modulares**

elíptica disfrazada.

En 1985 el matemático alemán Gerhard Frey (1944) sugirió que podría existir una solución al teorema de Fermat y que podría expresarlo como una curva elíptica que no sería una forma modular lo que descartaría a la conjetura de Taniyama - Shimura, sin embargo Frey no logró demostrar que su representación del último teorema de Fermat como una curva elíptica no fuera modular, a ésta se le llamó conjetura épsilon que pocos años después sería demostrada, resultando ser un paso fundamental en el camino hacia la demostración del último teorema de Fermat ya que implica que si la conjetura de Taniyama - Shimura es cierta entonces el último teorema de Fermat lo es.

La idea que siguió Andrew Wiles para demostrar la conjetura de Taniyama - Shimura fue determinar que existe el mismo número de curvas elípticas que de formas modulares, dividiéndolas en familias, y lo hizo transformando las curvas elípticas en representaciones de Galois asociadas al trabajo del matemático Évariste Galois (francés 1811 - 1832) (ver [5]), que sería uno de los pasos más importantes durante la demostración, la pregunta que surgió fue ¿cómo relacionar la representaciones de Galois con las formas modulares? La teoría de Iwasawa que debe su nombre al matemático Kenkichi Iwasawa (japonés 1917 - 1998) era la respuesta a esta pregunta y Wiles tenía ya conocimiento sobre éste gracias a su trabajo de doctorado en el que estudió curvas elípticas mediante la teoría Iwasawa.

Un problema surgido con la aplicación de la teoría Iwasawa fue resuelto por Matthias Flach (alemán), tal problema conocido como fórmula del número de clase permitió a Wiles definir la relación entre las representaciones de Galois y las formas modulares. A partir de allí Wiles dedicó su trabajo a ampliar el resultado de Flach para demostrar la totalidad de la fórmula del número de clase.

Después de comprobar que todas las familias o representaciones de Galois que había estudiado efectivamente eran formas modulares, se animó a mostrar sus resultados al mundo en una serie de conferencias tituladas *funciones L y aritmética* en el *Isaac Newton Institute for Mathematical Science* de Cambridge, en las que como el nombre lo indica, no se develó el resultado final del trabajo de Wiles sino que, por el contrario se presentó como una charla rutinaria que llevó a los asistentes a darse cuenta poco a poco que dicho trabajo llevaba a la demostración de la conjetura Taniyama - Shimura.

Como debe ser, toda demostración ha de ser puesta a prueba para poder verificar su validez, allí surgió un obstáculo relacionado a un error en una de las representaciones de Galois, error que le cobró a Wiles algunos meses más de trabajo y volver a su aislado estudio en el ático de su casa hasta conseguir en Octubre de 1994 publicar dos artículos *Curvas elípticas modulares y el último teorema de Fermat* y *Propiedades anulares de ciertas álgebras de Hecke* junto a Richard Taylor (Reino unido, 1962), el primero anuncia la demostración de entre otras cosas el último teorema de Fermat basado en el segundo que presenta un paso crucial para la demostración, entre los dos artículos suman 170 páginas.

El trabajo de Andrew Wiles le permitió acceder a codiciados premios tales como el premio Wolfskehl (ver [1]) y el 15 de Marzo de 2016 el premio Abel (considerado por muchos el Nobel de matemáticas) "por su impresionante demostración de *el último teorema de Fermat* a través de la conjetura de modularidad para curvas elípticas semiestables, abriendo una nueva era en la teoría de números."

Referencias

[1] Klaus Barner, *Paul wolfskehl and the wolfskehl prize*, Notices of the AMS **44** (1997), no. 10, 1294–1303.

[2] E.T. Bell and R. Ortiz, *Historia de las matemáticas*, Ciencia y Tecnología Series, Fondo de Cultura Economica, 1985.

[3] J.B. Fraleigh and M.L. Mateos, *Algebra abstracta: primer curso*, Addison-Wesley Iberoamericana, 1988.

[4] T. Koshy, *Elementary number theory with applications*, Elementary Number Theory with Applications Series, Elsevier Science, 2007.

[5] Álvaro Lozano-Robledo, *Desde fermat, lamé y kummer hasta iwasawa: Una introducción a la teoría de iwasawa.*

[6] Kenneth A Ribet, *Galois representations and modular forms*, Bulletin of the American Mathematical Society **32** (1995), no. 4, 375–402.

[7] Karl Rubin and Alice Silverberg, *A report on wiles' cambridge lectures*, Bulletin of the American Mathematical Society **31** (1994), no. 1, 15–38.

[8] S. Singh, D. Galadí-Enríquez, and J.G. Cabello, *El enigma de fermat*, Booket: Ciencia, Planeta, 2006.

M&T • 1-4
Semana Uno - 2016

Matemáticas & Tecnología

El Costo de no Pensar: Una Terna Pitagórica Especial

Reflexión

Lic. Fausto Mauricio Lagos Suárez[1*], German David Martínez[2]**

1 Mg. Ingeniería computacional y matemática, Depto. Matemáticas URV, Tarragona, España.

2 Grado décimo, Colegio Seminario Diocesano, Duitama, Colombia

Abstract: A pesar de que el teorema de Pitágoras fue utilizado por antigüas culturas, éste se le atribuye precisamente a Pitágoras debido a que fue él quien consiguió demostrar de manera definitiva que $x^2 + y^2 = z^2$ es un resultado verdadero para cualquier triángulo rectángulo. El teorema de Pitágoras conocido por casi todos quienes han pasado por la escuela pero tan mal entendido también por la mayoría, aún hoy desvela grandes sorpresas para quienes se atreven a profundizar en él. El presente artículo presenta un algoritmo de solución al problema de determinar el producto de los elementos de la terna pitagórica cuya suma equivale a mil. Abordando de forma elemental el concepto de *eficacia algorítmica* se presenta un somero análisis de la diferencia entre pensar y simplemente codificar la solución de un problema, luego muestra un algoritmo eficiente desarrollado en GNU / Octave y se deja un reto planteado a quienes estén dispuestos a sumergirse en el maravilloso mundo de las matemáticas.

MSC: 68Q17, 68Q25, 68Q32

Keywords: Teorema de Pitágoras • Cálculo computacional • Eficacia algorítmica

1. Introducción

Pitágoras de Samos un prolífico matemático que vivió en el siglo quinto antes de Cristo, puede ser considerado uno de los iniciadores de la historia de las matemáticas ya que con él las matemáticas dieron el paso de la simple intuición práctica a la demostración formal e inefable, hoy se le recuerda por el teorema que lleva su nombre a pesar de que éste no fue su única aportación a las matemáticas ni tampoco la más grande de ellas, sin embargo su teorema, que abrió las puertas al *último teorema de Fermat*, un problema que tardó en resolverse más de trescientos años, aún hoy sigue dando trabajo a los matemáticos interesados en desvelar por completo toda la magnificencia del descubrimiento de Pitágoras, en particular desde las ciencias de la computación el estudio de las ternas pitagóricas ofrece un particular reto al no iniciado que merece la pena ser abordado con rigor.

El proyecto Euler, llamado así en honor al matemático suizo Leonard Euler, es una compilación de problemas matemáticos propuestos para ser resueltos mediante algorítmos de computación desarrollados en cualquier lenguaje

* *E-mail: fausto.lagos@colseminario.edu.co*
** *E-mail: german.martinez@colseminario.edu.co*

de programación a modo de competencia mundial; debido a que GNU / Octave (Matlab) es un lenguje de programación orientado al cálculo científico, con una rápida curva de aprendizaje y que es de los menos utilizados por los participantes en la mencionada competencia, se ha elegido para ser la herramienta en la que se fundamente la solución de tales problemas, para este artículo se ha seleccionado el problema 9 que propone buscar una terna pitagórica especial, ya que cualquiera de los lectores puede deleitarse acordándose de sus años de escuela en los que se aproximó al problema de las ternas pitagóricas.

2. El problema

Una terna pitagórica es una serie de tres números naturales, $a < b < c$, para los cuales

$$a^2 + b^2 = c^2.$$

Por ejemplo, $3^2 + 4^2 = 9 + 16 = 5^2$. Existe exactamente una terna pitagórica para la cual $a + b + c = 1000$. Encuentre el producto abc.

2.1. La Solución

Definición 2.1 (Eficacia Algorítmica).
Es una métrica del esfuerzo computacional requerido para ejecutar un algorítmo. [2]

En palabras más cómodas, la eficacia computacional se encarga de medir cuando una secuencia de pasos (algorítmo) utiliza menos ciclos de computación o menos lecturas de disco, esta métrica puede calcularse en relación al tiempo de cómputo de un algoritmo (tiempo de ejecución arrojado por el sistema) en tres casos, uno favorable, uno medianamente favorable y uno desfavorable, e.g. si se tuviera que buscar de forma secuencial un número en la lista de números de uno a cien, el caso favorable sería buscar el uno, el caso medio sería buscar el cincuenta y el caso desfavorable sería buscar el cien.

Para el problema planteado el caso mas desfavorable consiste es buscar todas las ternas pitagóricas y evaluar en cada una la suma de los tres elementos hasta dar con aquella cuya suma de sus elementos sea mil, los pasos que seguiría este algoritmo son:

1. Elegir un número entero para a,
2. Elegir otro número entero de forma secuencial desde uno, tal número será b,
3. Sumar el cuadro de a al cuadrado de b y evaluar si el resultado tiene raíz cuadrada exacta, obteniendo c, si no tiene raíz cuadrada exacta deben repetirse los pasos dos y tres hasta conseguir el valor de c,
4. Evaluar la suma $a + b + c$ y compararla con mil,
5. Si la suma no es igual a mil, elegir un entero diferente para a y volver a ejecutar los pasos del dos al cuatro,

6. Cuando la suma sea igual a mil, resolver el producto abc y dar la respuesta.

evidentemente, este algoritmo es muy poco eficaz, computacionalmente hablando debido al número de operaciones que se deben ejecutar tomaría varios minutos en encontrar la respuesta, una forma de construir un algortimo más eficaz es reducir el número de variables a calcular para lo cual se puede hacer uso de la relación

$$(2n^2 + 2mn, m^2 + 2mn, m^2 + 2mn + 2n^2) \tag{1}$$

generatriz de ternas pitagóricas[1] a partir de dos enteros n y m, teniendo en cuenta (1) y la condición del planteamiento $(a + b + c = 1000)$ se tiene la equación

$$2m^2 + 6mn + 4n^2 = 1000$$

que al resolverla para n queda

$$n = \frac{1}{4}\left(\pm\sqrt{m^2 + 4000} - 3m\right), \tag{2}$$

este resultados deja a m libre para tomar cualquier valor entero siendo de interés aquellos m para los cuales $n \in \mathbb{Z}$, lo que elimina además el problema de las raices negativas. Con lo anterior se desarrolló el algoritmo en GNU / Octave mostrado a continuación obteniendo la respuesta correcta en un tiempo de ejecución 0.002524 segundos.

```
function number = problem9()
  m = 1;
  n = ene(m);

  while rem(n, fix(n)) != 0
    m++;
    n = ene(m);
  endwhile

  a = m^2 + 2 * m * n;
  b = 2 * n^2 + 2 * m * n;
  c = m^2 + 2 * m * n + 2 * n^2;
  number = a * b * c;

  function n = ene(m)
    n = 1 / 4 * (sqrt(m^2 + 4000) - 3 * m);
  endfunction

endfunction
```

3. Reflexión a modo de conclusiones

- Evidentemente abordar el estudio de un problema en matemáticas no solamente requiere de conocimientos adquiridos sino la disposición para abordar el estudio de nuevos conceptos, este tal vez es un enfoque del estudio de las matemáticas más eficiente que la memorización programática de conceptos.

[1] *Una demostración de esta relación puede encontrarse en http://gaussianos.com/generando-ternas-pitagoricas/*

- Pensar es lo que distingue al ser humano de las demás especies, sin embargo cuando se trata de abordar problemas, en particular de ciencias, parece que la mayoría aborreciera esta característica abocándose a recetas memorísticas y simples que como se demuestra al evaluar la eficacia algorítmica, son poco eficientes.
- El concepto de *eficacia algorítmica* debería ser uno de los primeros conceptos estudiados en matemáticas ya que éste muestra al estudiante que es más eficiente pensar antes de resolver o en el caso de la programación computacional, pensar antes de codificar.

4. Invitación

Sin más motivación que la satisfacción de conseguir resolverlo y que su nombre y solución aparezca en la próxima publicación, se deja como invitación al lector el siguiente problema; tenga en cuenta que soluciones a estos problemas pueden encontrarse fácilmente en internet, sin embargo lo interesante no es la solución en sí misma sino el proceso para obtenerla, por lo tanto se le sugiere al arrojado lector que aborde el problema, codificar su solución utilizando GNU / Octave.

4.1. Problema 12:

La secuencia de números triangulares es generada sumando números naturales. El séptimo número triangular es $1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 = 28$. Los primeros diez números triangulares son:

$$1, 3, 6, 10, 15, 21, 28, 36, 45, 55, ...$$

La descomposición factorial de los primeros siete números triangulares es

1: 1
3: 1, 3
6: 1, 2, 3, 6
10: 1, 2, 5, 10
15: 1, 3, 5, 15
21: 1, 3, 7, 21
28: 1, 2, 4, 7, 14, 28

Puede verse que 28 es el primer número triangular que tiene más de cinco divisores. ¿Cuál es el primer número triangular que tiene más de quinientos divisores?

Referencias

[1] Project Euler, http://projecteuler.net, 2015.

[2] Francesc Guim Bernat Ivan Rodero Castro, *Computación de altas prestaciones*, UOC, 2014.

[3] Miguel Ángel Morales Medina, http://gaussianos.com/generando-ternas-pitagoricas/, 2009.

M&T • 1-5
Número Uno - 2016

Matemáticas & Tecnología

Del Error Inducido por Redondeo o Truncamiento de Cifras Decimales

Revisión

Lic. Fausto Mauricio Lagos Suárez[1*],

1 Mg. Ingeniería computacional y matemática, Depto. Matemáticas URV, Tarragona, España.

Abstract: En muchos cálculos numéricos desprevenidamente se recurre al uso de algún tipo de aproximación sin pensar en el error inducido en los resultados; si bien hay quienes discuten la importancia de este tipo de error, nadie debería ser ajeno a sus consecuencias. Este artículo revisa los conceptos necesarios para entender las implicaciones de los tipos de aproximación, el error computacional y su impacto en los cálculos recursivos como un ejemplo del error inducido por aproximación.

MSC: 00A06

Keywords: Cálculo numérico • Error computacional • Redondeo • Truncamiento

1. Introducción

La simulación computacional o modelamiento computacional en años recientes ha ganado importancia como un método de experimentación particularmente en áreas en las que la experimentación directa con el objeto de interés es costosa o de alto riesgo. Campos como el diseño industrial o la neurociencia han reconocido en el modelamiento matemático y simulación por computador una poderosa herramienta de experimentación; sin embargo hay límites en los resultados que este tipo de modelos arrojan, tales límites están asociados a los tipos de aproximación y el error que éstos inducen en los cálculos. Un hecho a destacar es que en cualquier contexto el uso de algún tipo de aproximación se hace obligatorio y por lo general se hace de forma inconsciente del error inducido en los resultados. Una exploración superficial del mencionado error permite observar la necesidad de deternerse en la importancia del error generado por la aproximación antes de truncar o redondear cifras en decimales.

2. Representación decimal de números racionales e irracionales

Definición 2.1 (Conjunto $\mathbb{Q}$).

El conjunto conformado por los números que pueden representarse como el cociente de dos enteros i.e. números

* *E-mail: fausto.lagos@colseminario.edu.co*

decimales finitos o decimales periódicos, se define como el conjunto de los números racionales el cual se denota por $\mathbb{Q}$, e.g. $\frac{3}{4} = 0{,}75$ o $\frac{1}{3} = 0.\overline{33}$ son números racionales.

Definición 2.2 (Conjunto $\mathbb{I}$).
Dado x un número real el cual no puede representarse como un cociente de dos enteros i.e. tiene infinitos decimales no periodicos, se dice de x que es un número irracional. El conjunto que contiene a todos los números x definidos como antes, se denota $\mathbb{I}$ y se define conjunto de los números irracionales. e.g. $\sqrt{2}$, e, ϕ, π.

De las definiciones de $\mathbb{Q}$ e $\mathbb{I}$ se tiene que todo número racional puede representarse como un valor decimal exacto si y solo si su número de cifras decimales es finito, en el caso de los números racionales que producen decimales periódicos y de los números irracionales, cualquier representación decimal corresponde a una aproximación del número.

Ejemplo 2.1.
Sea el número racional

$$\frac{1}{7} = 0.\overline{142857}$$

la fracción con denominador menor que 10 que produce el mayor número de cifras periódicas, su representación decimal es una aproximación del valor real dado ya que las cifras periódicas se repiten sin fin, lo cual queda indicado por la barra sobre tales cifras.

Ejemplo 2.2.
El caso del número irracional π, del cual la Figura 1 presenta solo unas pocas de sus infinitas cifras decimales,

3.141592653589793238462643
3832795028841971693993751
0582097494459230781640628
6208998628034825342117067
9821480865132823066470938
4460955058223172535940812
8481117450284102701938521
1055596446229489549303819
6442881097566593344612847

Figura 1. **Las primeras 225 cifras de π.**

además de tratarse del número irracional más conocido, es un número del cual hasta hoy se han encontrado más de setenta mil cifras decimales obtenidas mediante un enorme costo computacional; sin embargo a pesar de utilizar las más grandes supercomputadoras nunca será posible determinar el total de sus cifras decimales dada su naturaleza infinitesimal, cualquier representación decimal de π no es más que una simple aproximación.

3. Cálculo numérico en punto flotante

Una consecuencia de las definiciones de $\mathbb{Q}$ e $\mathbb{I}$ es la imposibilidad de computar con el valor real de números decimales periódicos o irracionales, por lo que se hace necesario establecer un nuevo conjunto numérico que corresponde a la representación computable de $\mathbb{R}$ en general, tal conjunto se constituye en los *números en punto flotante* y está dado por

$$\mathbb{F}(\beta, t, L, U)$$

donde β es la base de representación (binaria, decimal, etc), t el número de cifras significativas y el rango (L, U) con L la cota inferior y U la cota superior, respectivamente, de los números que pueden ser representados e.g. en GNU / Octave el conjunto $\mathbb{F}$ es $\mathbb{F}(2, 53, -1021, 1024)$ lo que en efecto significa que en base 10 se pueden representar números con 15 cifras significativas dados entre $2{,}225073858507201 \cdot 10^{-308}$ y $1{,}7976931348623158 \cdot 10^{308}$. Lo anterior hace que en todo cálculo desarrollado en un computador (llámese computador cualquier herramienta de cómputo numérico i.e. calculadora, pc, etc.) existan errores que incluso hacen que las reglas aritméticas definidas en $\mathbb{R}$ no sean las mismas para $\mathbb{F}$. El lector interesado puede ampliar estos conceptos y sus implicaciones en [1].

3.1. Error de redondeo

El *error de redondeo* aparece en el uso de la llamada *regla de redondeo* en la cual si una cifra es mayor o igual a cinco puede ésta reemplazarse por su sucesor entero inmediato e.g. $1{,}3428 \approx 1{,}343$, en caso contrario no se altera la cifra. De la definición de $\mathbb{F}$ se tiene que todo cálculo numérico desarrollado tiene un error de redondeo relativo dado por

$$\frac{|x - fl(x)|}{|x|} \leq \frac{1}{2}\epsilon_M, \quad \text{con } x \neq 0,$$

donde $x \in \mathbb{R}$, $fl(x)$ es la representación en punto flotante de x y ϵ_M es la distancia entre 1 y el número en punto flotante mayor que 1 más próximo a éste. En el caso de GNU / Octave $\epsilon_M = 2{,}22 \cdot 10^{-16}$.

3.2. Error de truncamiento

Debido a la imposibilidad de representar los elementos de $\mathbb{R}$ de manera exacta (con todas sus cifras decimales) siempre está presente otro tipo de error, el error de truncamiento, el cual aparece al cortar el número de cifras decimales que representan a un número, como ya se mencionó en $\mathbb{F}$ se utilizan 15 cifras decimales significativas para representar cualquier número.

La Figura 2 muestra los errores presentes en el proceso computacional. e_m es el error que ocurre cuando se fuerza la realidad física, e_t el error de truncamiento, e_a el error de redondeo y $e_c = e_a + e_t$, el error computacional.

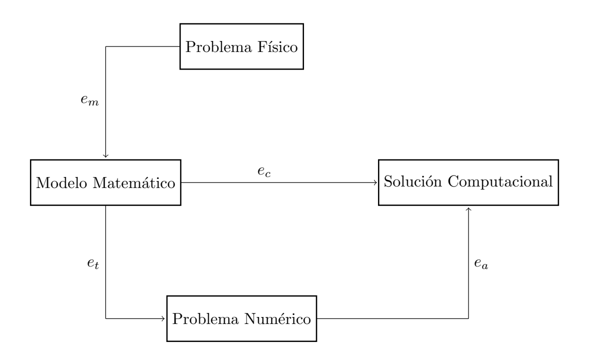


Figura 2. **Tipos de errores en un proceso computacional**

4. Un ejemplo del error inducido por redondeo

Para ejemplificar el error inducido en el cálculo numérico, se desarrollaron diez *iteraciones*[1] de la función lineal

$$f(x) = \alpha x$$

tomando el parámetro $\alpha_1 = 3{,}99$ y $\alpha_2 = 4$, obsérvese que se está aplicando un factor de aproximación entre α_1 y α_2 equivalente a 0,01.

Tomando un valor aleatorio en $(0, 1)$ para x_1 se obtuvo los resultados presentados en la Figura 3 que muestra la relación iteraciones vrs $f(x)$.

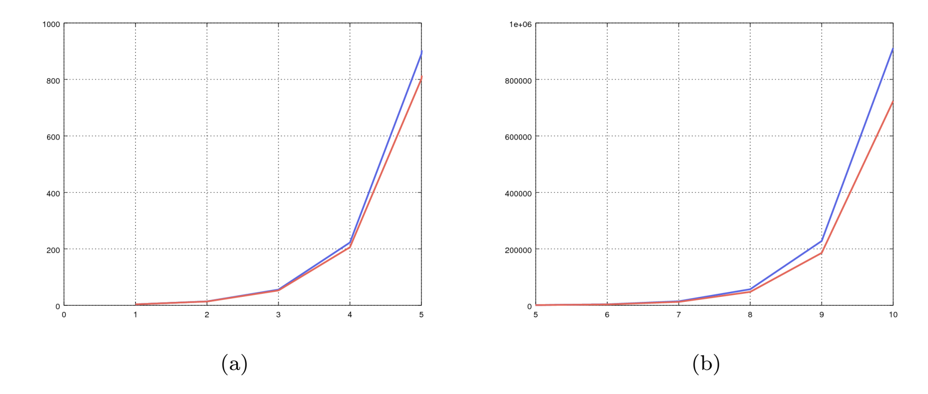


Figura 3. **Diez iteraciones de $f(x) = \alpha x$, en rojo para $\alpha_1 = 3{,}99$, en azul para $\alpha_2 = 4$.**

En particular en la quinta iteración la diferencia dentre $f(x) = \alpha_1 x$ y $f(x) = \alpha_2 x$ es de aproximadamente 87,7100774626490, lo que al continuar hasta la décima iteración resulta en 187477,608831305, esto permite ver cómo el error inducido por una aproximación inicial equivalente, como ya se mencionó, a 0,01 crece rápidamente alcanzando valores que en contexto pueden representar catastróficos resultados. Dos ejemplos de esto pueden encontrarse en [3] el informe oficial del error de *overflow* en la computadora a bordo del *misil Patriot* del ejército de los Estados Unidos que causó la muerte a 28 soldados en la guerra del Golfo Pérsico, y en [2] un informe sobre el accidente de la lanzadera espacial Ariane 5.

[1] *Léase por iteración el cálculo recursivo sobre la misma función i.e. dado un valor inicial x_1 se determina $y_1 = f(x_1)$; $y_2 = f(y_1)$; $y_3 = f(y_2)$...*

Referencias

[1] F. Saleri A. Quarteroni, *Cálculo científico con matlab y octave*, Springer, 2006.

[2] Prof. J. L. Lions, http://sunnyday.mit.edu/accidents/Ariane5accidentreport.html, 1996.

[3] Information Management and USA Technology Division, http://fas.org/spp/starwars/gao/im92026.htm, 1992.